2. Fifis elsőrendű példa

2.1. A feladat

Az állatok világát vizsgáljuk, azon belül pedig a kutyákról teszünk állításokat. Állapítsuk meg különböző módszerekkel, hogy az adott állításokból következik-e a következmény.

F_1: Fifi puli.

F_2: Minden puli kutya.

F_3: Minden kutya, aki ugat, nem harap.

F_4: Fifi ugat.

G: Van olyan kutya, aki nem harap.

Megállapított tények halmaza: $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$
Feltételezett következmény: G
Következtetésforma: $(\mathcal{F}, G)$

Helyes következtetésforma-e az $(\mathcal{F}, G)$?
Azaz, fenáll-e a következő szemantikus következmény: $\mathcal{F} \models G$?

2.2. A probléma formalizálása

Adjuk meg az univerzumot, amelyen értelmezni szeretnénk az állításokat, ha van konstans elem, akkor azt is nevezzük el, illetve jelöljük predikátum szim-bólumokkal az egyes egyszerű tulajdonságokat.

$U = \{\text{állatok}\}$, $a \in U$, ahol a egy konstans, ami Fifit jelöli.

- $K(x)$: x kutya	$[F_1:]$ $P(a)$
- $P(x)$: x puli	$[F_2:]$ $\forall x(P(x) \supset K(x))$
- $U(x)$: x ugat	$[F_3:]$ $\forall x(K(x) \land U(x) \supset \neg H(x))$
- $H(x)$: x harap	$[F_4:]$ $U(a)$
	$[G:]$ $\exists x(K(x) \land \neg H(x))$

3. Elsőrendű alaprezolúció

Alaprezolúciós kalkulussal egy klózhalmaz kielégíthetetlenségét tudjuk igazolni. Így először a szemantikus következmény vizsgálatunkat formulahalmaz kielégíthetetlenségének vizsgálatához megfelelőnek kell alakítanunk, majd utána a formulahalmazt klózhalmazzá.

$\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \models G \Rightarrow \{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$ kieléígthetetlen?

1. Formulahalmazt átalakítom egy formulává, hogy könyebb legyen alakítani:
   $P(a) \land \forall x(P(x) \supset K(x)) \land \forall x(K(x) \land U(x) \supset \neg H(x)) \land U(a) \land \neg\exists x(K(x) \land \neg H(x))$

2. Implikációk felbontása a $A \supset B \equiv \neg A \lor B$ átalakítást használva:
   $P(a) \land \forall x(\neg P(x) \lor K(x)) \land \forall x(\neg(K(x) \land U(x)) \lor \neg H(x)) \land U(a) \land \neg\exists x(K(x) \land \neg H(x))$

3. Negációk bevitele addig, míg csak egy atomi formula lesz a hatáskörükben:
   $P(a) \land \forall x(\neg P(x) \lor K(x)) \land \forall x((\neg K(x) \lor \neg U(x)) \lor \neg H(x)) \land U(a) \land \forall x \neg(K(x) \land \neg H(x)) \equiv$
   $P(a) \land \forall x(\neg P(x) \lor K(x)) \land \forall x(\neg K(x) \lor \neg U(x) \lor \neg H(x)) \land U(a) \land \forall x(\neg K(x) \lor H(x))$

4. Kvantorok összevonása (itt a $\forall x A \wedge \forall y B = \forall x(A \wedge B)$ átalakítás kétszeri használval):
   $P(a) \wedge \forall x((\neg P(x) \vee K(x)) \wedge (\neg K(x) \vee \neg U(x) \vee \neg H(x)) \wedge (\neg K(x) \vee H(x)) \wedge U(a))$

5. Kvantorkiemelés:
   $\forall x(P(a) \wedge (\neg P(x) \vee K(x)) \wedge (\neg K(x) \vee \neg U(x) \vee \neg H(x)) \wedge (\neg K(x) \vee H(x)) \wedge U(a))$

6. Változóiban tiszta klózhalmaz kialakítása a konjukciók mentén szétválasztva:
   $\mathbf{K} := \{(P(a), \neg P(x) \vee K(x), \neg K(y) \vee \neg U(y) \vee \neg H(y), \neg K(z) \vee H(z), U(a)\}$

Herbrand-univerzum: Herbrand univerzum előállításához először kiválogatjuk a klózhalmazból a függvényszimbólumokat és megnézzük, hogy hány paraméteresek, illetve összegyűjtjük a konstans szimbólumokat, amelyek a H_0 halmazt fogják alkotni. Az újabb univerzum halmazokat úgy állítjuk elő, hogy az előző halmazbeli elemeket helyettesítjük be a függvényekbe, az összes lehetséges módon.

Ebben a feladatban nincsenek függvényszimbólumaink, így a helyettesítéseket sem tudjuk elvégezni, hiszen nincs mibe, vagyis a teljes Herbrand univerzumunk is a H_0 halmazzal lesz egyenlő: $H_0 = \{a\} = H_\infty$

Alaprezolúciós levezetés: Az alaprezolúciós levezetés hasonlóan működik, mint a nulladrendű rezolúciós levezetés. Azonban itt, amikor a klózhalmazból veszünk fel egy elemet a levezetésbe, akkor a változókat helyettesítjük valamely Herbrand-univerzumbeli elemmel (alapklózokat hozunk létre). Jelenleg csak egy elemű a H_∞ halmazunk, úgyhogy minden esetben csak ezt az egy elemet tudjuk helyettesíteni. A helyettesítést a lépés mellett jelöljük.

1.	$\neg K(a) \vee \neg U(a) \vee \neg H(a)$	$[\in \mathbf{K}]$	$[y\|\|a]$
2.	$\neg K(a) \vee H(a)$	$[\in \mathbf{K}]$	$[z\|\|a]$
3.	$\neg K(a) \vee \neg U(a)$	$[res(1,2)]$	
4.	$U(a)$	$[\in \mathbf{K}]$	
5.	$\neg K(a)$	$[res(3,4)]$	
6.	$\neg P(a) \vee K(a)$	$[\in \mathbf{K}]$	$[x\|\|a]$
7.	$\neg P(a)$	$[res(5,6)]$	
8.	$P(a)$	$[\in \mathbf{K}]$	
9.	$\square$	$[res(7,8)]$	

1. táblázat. Alaprezolúciós kalkulusbeli levezetés

Mivel sikerült egy megfelelő alaprezolúciós levezetést megadnunk a Herbrand-univerzum felett, így a megadott klózhalmaz kielégíthetetlen és a szemantikus következmény is teljesül.